ICARE

SESSION 1996

EPREUVE DE MATHEMATIQUES 1

Toutes filières

PROBLEME

I - Soit n et m deux nombres entiers positifs ou nuls.

1°) - Soit x un nombre réèl. On considère l'intégrale :

$$J_{[n.\ m]}(x) = \int_0^x (x - t)^n\ t^m\ dt$$

a) Exprimer $J_{[n.\ m]}(x)$ en fonction de $J_{[n-1\ .\ m+1]}(x)$, pour $n \geq 1$.

b) En déduire l'expression de $J_{[n.\ m]}(x)$ (on calculera $J_{[o.\ m+n]}(x)$) .

c) En développant le binôme $(x-t)^n$, donner une nouvelle expression de $J_{[n.\ m]}(x)$.

2°) - En déduire la valeur des sommes : $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{p!(n - p)!(m + p + 1)}$

II - Soit x un nombre réèl . Calculer l'intégrale : $F(x) = \int_0^x f(x-t)\, f(t)\, dt$ successivement sous les hypothèses suivantes :

1°) $f(t) = e^t$

2°) $f(t) = t^k$ où $k \in N$

3°) $f(t) = \frac{1}{1-t}$ en supposant $|x| < 1$

4°) $f(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \le t \le 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

III - On suppose que la série entière réelle $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i t^i}{i!}$ converge sur $]-R\ ;\ R[$ (où $R > 0$) et a pour somme $f(t)$.

Etablir que pour $|x| < R$ on a :

$$\int_0^x f(x-t)\, f(t)\, dt = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{Aq}{q!} x^q$$

où $Aq = \sum_{i=1}^{q} a_{i-1}\ a_{q-i}$

(on admettra qu'on peut intégrer, terme à terme, la série obtenue par multiplication des séries qui ont pour sommes respectives f(t) et f(x-t)) .

IV -

1°) - Vérifier III lorsque $f(t) = e^t$, puis lorsque $f(t) = t^k$ ($k \in N$) en développant directement en séries entières les fonctions F(x) obtenues aux II, 1°) et 2°).

2°) - Développer directement en série entière par rapport à x la fonction F(x) obtenue au II, 3°), puis en déduire, en appliquant III au cas où $f(t) = \frac{1}{1-t}$ la valeur des sommes :

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{1}{i}\left(\frac{1}{2^{q-i}} - \frac{1}{C_q^{\,i}}\right)$$

où C_q^i désigne le nombre de combinaisons de q objets i à i

V - Pour tout réel x, on pose $G(x) = \frac{1}{2}\left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2$

(On ne cherchera pas à calculer l'intégrale figurant dans la définition de G).

Les 3 questions qui suivent sont indépendantes.

1°) - Soit l'équation différentielle (E) :

$$\tfrac{1}{2}\, y''(x) + 3x\, y'(x) + (4x^2+1)\, y(x) = e^{-2x^2}$$

a) Déterminer l'équation différentielle (E') vérifiée par la fonction z(x) définie par : $z(x) = e^{x^2}\, y(x)$.

b) En déduire la solution y(x) de (E) en fonction de G'(x) telle que : $y(o) = -1$ et $y'(o) = 1$.

2°) - Soit $F(x) = \int_0^x f(x-t)\, f(t)\, dt$ où $f(t) = e^{-2t^2}$

prouver que $G'(x) = F(x)$.

3°) -

a) Montrer que G(x) admet une limite finie **L** (que l'on ne calculera pas) quand x tend vers $+\infty$.

b) Soit dans le plan (Ox ; Oy) les trois domaines D_1 , D_2 , D_3 définis comme suit :

$$D_1 = \{(x,y) \in R^2 / x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

$$D_2 = \{(x,y) \in R^2 / |x| \leq a \text{ et } |y| \leq a\}$$

$$D_3 = \{(x,y) \in R^2 / x^2 + y^2 \leq 2a^2\}$$

où $a > 0$

b1) Représenter graphiquement D_1, D_2 et D_3 dans le plan (Ox, Oy) .

b2) Soit $h(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$.

Calculer $I_1 = \iint_{D_1} h(x,y)\, dx\, dy$,

en déduire $I_3 = \iint_{D_3} h(x,y)\, dx\, dy$,

et vérifier que $I_1 \leq I_2 \leq I_3$ où $I_2 = \iint_{D_2} h(x,y)\, dx\, dy$

b3) En déduire, par un passage à la limite sur a , que :

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \right)^2 = \Pi$$

b4) Déterminer alors $\lim_{x \to +\infty} G(x)$